

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES

LUDOVIC GOUDENÈGE

RÉSUMÉ. Le but de ce polycopié de cours donné entre 2016 et 2019 à CentraleSupélec est relativement simple, il s'agit de montrer comment aborder les équations aux dérivées partielles en tant qu'objet infini-dimensionnel dérivant d'un système d'équations différentielles stochastiques. Il n'a pas la prétention d'être exhaustif sur le domaine, ni même novateur, mais simplement de donner les premières idées nécessaires à la manipulation des objets impliqués, sans demander non plus trop de pré-requis. Certaines démonstrations ou points techniques sont donc laissés de côté afin de ne pas perturber le fil conducteur. Le lecteur intéressé pourra s'orienter vers les cours de Pardoux, Hairer, ou encore les livres de Da Prato et Zabczyk. Je remercie particulièrement Charles-Edouard Bréhier pour les notes personnelles de son propre cours qui m'ont grandement aidé.

Je remercie les élèves de CentraleSupélec auxquels j'ai donné ce cours. Ils ont été attentifs et vigilants, m'aidant à corriger plusieurs des erreurs ou imprécisions rencontrées durant les heures passées en classe.

TABLE DES MATIÈRES

1. Quelques problèmes liés au monde aléatoire	3
1.1. Introduction et définitions	3
1.2. Exercices sur le chapitre 1	6
2. Intégrale d'Itô	7
2.1. Processus représentant le bruit	7
2.2. Construction de l'intégrale d'Itô	7
2.3. Propriétés de l'intégrale d'Itô	7
2.4. Formule d'Itô	8
2.5. Exercices sur le chapitre 2	9
3. Équations différentielles stochastiques	11
3.1. Définition des solutions	11
3.2. Existence et unicité	11
3.3. Exercices sur le chapitre 3	11
4. Processus de Wiener cylindrique	13
4.1. Processus Gaussien isonormal	13
4.2. Bruit blanc espace-temps	15
4.3. Intégrale stochastique contre un bruit blanc espace-temps	17
5. Équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires dirigées par un bruit blanc espace-temps	19
5.1. Semi-groupe pour les équations aux dérivées partielles linéaires	19
5.2. Semi-groupe pour les équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires dirigées par un bruit blanc espace-temps	21
5.3. L'équation de la chaleur stochastique en domaine borné avec des conditions de Dirichlet homogènes dirigée par un bruit blanc espace-temps	22
6. Équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires dirigées par un bruit blanc en temps et à trace finie en espace	23
6.1. Intégrale stochastique contre une martingale dans un espace de Hilbert	23
6.2. Approche variationnelle des équations aux dérivées partielles linéaires	26
6.3. Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires	28

1. QUELQUES PROBLÈMES LIÉS AU MONDE ALÉATOIRE

1.1. Introduction et définitions. On cherche à donner un sens à des équations impliquant une notion de bruit. Un exemple simple basé sur un modèle de croissance de population mène à une équation de la forme suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(t)N(t), \quad N(0) = N_0,$$

où $N(t)$ est la taille de la population à l'instant t et N_0 une taille initiale. Le taux de croissance r est sujet à des fluctuations qui suggèrent de l'écrire sous la forme :

$$r(t) = \bar{r}(t) + \text{"bruit"},$$

où $\bar{r}$ représente la partie sans fluctuations aléatoires.

Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on peut modéliser ce bruit à l'aide d'une famille $\{W(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$ et on cherche à construire une famille $\{N(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$ qui vérifierait :

$$(1) \quad \frac{dN(t, \omega)}{dt} = (\bar{r}(t) + W(t, \omega))N(t, \omega), \quad N(0, \omega) = N_0(\omega),$$

avec N_0 une variable aléatoire.

La première difficulté consiste en la mesurabilité de la famille $\{N(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$. On rappelle deux notions essentielles de la mesurabilité.

Définition 1.1. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On dit que Y est $\mathcal{F}$ -mesurable si pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}.$$

L'ensemble $\mathcal{H}_Y := \{Y^{-1}(U) \in \mathcal{P}(\Omega) : U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ est en réalité la plus petite tribu rendant Y mesurable, on l'appelle la tribu engendrée par Y .

De cette définition suit un principe essentiel parfois appelé le lemme de Doob-Dynkin.

Lemme 1.2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors que Y est $\mathcal{H}_X$ -mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne g telle que $Y = g(X)$.

La mesurabilité est donc stable par transformation borélienne, et si on considère une quantité finie d'instants $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}^d$, on peut tout à fait parler de la mesurabilité de la famille $\{N(t, \omega)\}_{t \in [t_1, \dots, t_k], \omega \in \Omega}$. Mais comme on souhaite introduire la dérivée de N par rapport à la variable t , il nous faut une collection infinie d'instants. On ne parle alors non plus d'une variable aléatoire mais d'un processus stochastique.

Définition 1.3. Un processus stochastique X est la donnée d'une famille de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexées sur un ensemble $\mathcal{T}$. On le note

$$X := \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}.$$

En règle générale et dans ce cours, l'ensemble $\mathcal{T}$ est un intervalle de la forme $[0, T]$ ou $[S, T]$ avec $0 < S < T$ ou encore $\mathbb{R}_+$. À chaque t fixé, on a donc une variable aléatoire $X_t : \omega \mapsto X_t(\omega)$. Et pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, on a accès à une fonction réelle $t \mapsto X_t(\omega)$ qu'on appelle une trajectoire du processus. Il est assez intuitif de considérer t comme le temps, et ω comme un événement ou une particule. À un processus stochastique X pour $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, on peut bien sûr associer la famille doublement indexée

$$\{X(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$$

telle que $X(t, \omega) = X_t(\omega)$. Les deux notations coexistent dans la littérature, mais on réserve parfois l'usage de l'une ou l'autre suivant la mesurabilité attendue. Dans toute la suite de ce cours, on considère que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complété, c'est-à-dire que la tribu $\mathcal{F}$ contient tous les négligeables. Précisément si $\mathbb{P}^*$ est la mesure extérieure, on suppose que $\mathcal{F}$ contient tous les sous-ensembles G de Ω tels que

$$\mathbb{P}^*(G) := \inf\{\mathbb{P}(F) \in \mathbb{R} : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0.$$

Remarque 1.4. *Tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ peut-être complété, en ajoutant dans $\mathcal{F}$ les ensembles négligeables, et en étendant la définition de $\mathbb{P}$ à cette nouvelle tribu générée.*

Définition 1.5. *On appelle les lois finies-dimensionnelles du processus stochastique X la donnée des mesures $\mu_{t_1, \dots, t_k}$ sur $(\mathbb{R}^d)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout k -uplets $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}^k$ telle que*

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \mathbb{P}[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k],$$

où les $\{F_i\}_{i=1, \dots, k}$ sont des boréliens quelconques de $\mathbb{R}^d$.

Il est important de comprendre que la donnée des lois finies-dimensionnelles du processus stochastique permet de déterminer certaines propriétés de X , mais qu'il n'y a pas unicité (voir exercice 1.4). Toutefois, étant donnée une famille de mesures satisfaisant certaines propriétés évidentes de compatibilité, on peut prouver l'existence d'un processus stochastique X possédant cette famille comme lois finies-dimensionnelles. C'est un théorème fondamental dû à Kolmogorov (Voir []).

Théorème 1.6. *Soit une famille de mesures $\nu_{t_1, \dots, t_k}$ sur $(\mathbb{R}^d)^k$, définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout k -uplets $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}^k$ telle que*

$$\nu_{\sigma(1), \dots, \sigma(k)}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$$

pour toute permutation σ sur $\{1, \dots, k\}$ et

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{m \text{ fois}})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus stochastique X tels que la famille de mesures ν représente les lois finies-dimensionnelles de X i.e.

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \mathbb{P}[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k],$$

où les $\{F_i\}_{i=1, \dots, k}$ sont des boréliens quelconques de $\mathbb{R}^d$.

Le premier exemple fondamental de processus stochastique est le mouvement Brownien. Il existe de multiples manières de le définir, mais de notre point de vue, il suffira d'en donner les lois finies-dimensionnelles pour l'exhiber à l'aide du théorème 1.6. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ la fonction gaussienne

$$p(t, x, y) = (2\pi)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2t}\right).$$

On peut alors définir une famille de mesures $\nu_{t_1, \dots, t_k}$ sur $(\mathbb{R}^d)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout k -uplets $(t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ tels que $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) := \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, y_1) \dots p(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, y_k) dy_1 \dots dy_k.$$

On étend ensuite la définition de la famille de mesures à tout k -uplets $(t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ (donc sans la condition de croissance des instants) par compatibilité sur les permutations.

Et puisque $\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) dy = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a bien la

deuxième relation de compatibilité. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$, par le théorème 1.6 on a l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega^{(x)}, \mathcal{F}^{(x)}, \mathbb{P}^{(x)})$ et d'un processus stochastique $B^{(x)}$ dont les lois finies-dimensionnelles sont données par

$$\mathbb{P}^{(x)}(B_{t_1}^{(x)} \in F_1, \dots, B_{t_k}^{(x)} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, y_1) \cdots p(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, y_k) dy_1 \cdots dy_k.$$

Définition 1.7. On appelle mouvement brownien démarré en x un processus stochastique défini par la formule précédente sur ses lois finies-dimensionnelles.

Il est clair qu'il n'y a pas unicité dans cette définition, mais on peut toutefois travailler avec de tels processus. En particulier ce sont des processus Gaussiens, c'est-à-dire que, notant G la variable aléatoire $(B_{t_1}^{(x)}, \dots, B_{t_k}^{(x)})$ sur $\mathbb{R}^{dk}$, cette variable G est un vecteur Gaussien de moyenne $(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, \dots, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{dk}$ et de matrice de covariance de taille $dk \times dk$ définie par blocs

$$\begin{pmatrix} t_1 I_d & t_1 I_d & \dots & t_1 I_d \\ t_1 I_d & t_2 I_d & \dots & t_2 I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_d & t_2 I_d & \dots & t_k I_d \end{pmatrix}$$

où I_d est la matrice identité de taille $d \times d$. On retrouve alors les propriétés classiques à savoir

$$\mathbb{E}^{(x)}[B_t^{(x)}] = x, \quad \mathbb{E}^{(x)}[\|B_t^{(x)} - x\|^2] = d t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et

$$\mathbb{E}^{(x)}[\langle B_t^{(x)} - x, B_s^{(x)} - x \rangle] = d \min(s, t), \quad \forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2,$$

d'où on tire

$$\mathbb{E}^{(x)}[\|B_t^{(x)} - B_s^{(x)}\|^2] = d |t - s|, \quad \forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2.$$

On obtient également que les incréments $B_{t_1}^{(x)}, B_{t_2}^{(x)} - B_{t_1}^{(x)}, \dots, B_{t_k}^{(x)} - B_{t_{k-1}}^{(x)}$ sont indépendants (en tant que vecteur Gaussien, il suffit de voir qu'ils sont non-corrélés). En effet pour $k \neq i$

$$\mathbb{E}^{(x)}[\langle B_{t_{k+1}}^{(x)} - B_{t_k}^{(x)}, B_{t_{i+1}}^{(x)} - B_{t_i}^{(x)} \rangle] = 0.$$

En particulier pour $(t, s) \in (\mathbb{R}_+)^2$, la variable $B_t^{(x)} - B_s^{(x)}$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s^{(x)}$ engendrée par la variable $B_s^{(x)}$ dès que $t > s$.

Enfin, et pour conclure cette introduction, on peut montrer qu'il existe une modification (on parle aussi de version) du mouvement Brownien qui est continue à l'aide d'un autre théorème du à Kolmogorov. Dans la suite de ce cours, on considérera la modification continue du mouvement Brownien et lorsqu'on construira des objets, on s'attardera à vérifier qu'ils possèdent une modification continue, afin de toujours travailler dans l'espace des processus à trajectoires continues.

Définition 1.8. Pour deux processus stochastiques X et Y définis sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que Y est une modification (ou une version) de X si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Ils ont alors les mêmes lois finies-dimensionnelles, mais pas forcément les mêmes trajectoires (voir exercice 1.4).

Cette propriété de continuité est en réalité un atout essentiel pour éviter des problèmes de mesurabilité jointe. En effet on a la proposition suivante :

Proposition 1.9. Soit X un processus stochastique à valeur dans $\mathbb{R}^d$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par $\mathbb{R}_+$. Supposons que X est à trajectoires continues, i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue, alors

$$Y : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (t, \omega) & \mapsto & X_t(\omega), \end{array}$$

est mesurable (par rapport au couple (t, ω) de ses deux variables, et non plus par rapport à ω à t fixé en tant que variable aléatoire), c'est-à-dire

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad Y^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Démonstration. On note $X^n : (t, \omega) \mapsto X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)$ si $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[$ pour $k \in \mathbb{N}$ ou encore

$$X^n(t, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[}(t),$$

qui est mesurable comme somme et produit dénombrable de variables aléatoires. Le processus X étant à trajectoires continues, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en posant $t_n = \frac{[2^n t]}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t$ la variable $X^n(t, \cdot) = X_{t_n}(\cdot) = Y(t_n, \cdot)$ qui converge presque sûrement vers X_t quand $n \rightarrow +\infty$. La limite simple de fonctions mesurables étant mesurable, on a la mesurabilité de Y . $\square$

Remarque 1.10. L'ensemble à t fixé sur lequel la convergence a lieu presque sûrement ne dépend pas de t . S'il en dépendait, on pourrait encore s'en sortir en ne considérant que les instants t rationnels.

Partant de ce constat, on note désormais indifféremment $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}} := \{\omega \mapsto X_t(\omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ou $\{X(t, \omega)\}_{t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega}$ la donnée d'un processus stochastique. On notera même de manière synthétique X la donnée d'un tel processus.

1.2. Exercices sur le chapitre 1.

Exercice 1.1. Montrer que la loi de $B_t^{(0)}$ en dimension $d = 1$ pour $t > 0$ est donnée par la densité

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

Quelle est la loi de $(B_t^{(0)})^2$ pour $t > 0$?

Exercice 1.2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a en dimension $d = 1$

$$\mathbb{E} \left[\exp(iu B_t^{(0)}) \right] = \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 t\right).$$

Exercice 1.3. Vérifier qu'en dimension $d = 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{E} \left[(B_t^{(0)})^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k k!} t^k.$$

Exercice 1.4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$ où μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ qui ne charge pas les singletons. On définit les processus X et Y par leurs trajectoires pour $t \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $\omega \in \mathbb{R}_+$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \omega, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_t(\omega) = 0.$$

Montrer que les lois finies-dimensionnelles de X et Y sont les mêmes, en montrant que X et Y sont versions l'un de l'autre.

2. INTÉGRALE D'ITÔ

2.1. Processus représentant le bruit. Partant de l'équation (1), on se pose la question de l'existence d'un processus stochastique X et d'un processus W tels que

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

avec b et σ des fonctions régulières sous les propriétés *ad hoc* :

- (i) $t \neq s \Rightarrow W_t$ est indépendant de W_s ,
- (ii) la loi de W_t est stationnaire, (*a fortiori* la loi de W_{t+r} est indépendante de r).
- (iii) $\mathbb{E}[W_t] = 0$.

Le problème est qu'il n'existe aucun processus raisonnable qui satisfasse ces propriétés. Si de plus on demande l'existence d'un moment d'ordre 2, on peut même perdre la mesurabilité de W par rapport à la tribu $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$, la fonction $(t, \omega) \mapsto W(t, \omega)$ n'étant alors pas mesurable. Le lecteur intéressé par la recherche et la construction de ces processus pourra lire [1]. Formellement on remarque toutefois que W semble proche d'une dérivée du mouvement Brownien, i.e. les conditions sur les instants de W se transposant sur les incréments de B :

- (i) $t \neq s \Rightarrow B_t - B_s$ est indépendant de $B_s - B_0$,
- (ii) la loi de $B_t - B_s$ est stationnaire, (ici la loi de $B_{t+r} - B_{s+r}$ est indépendante de r),
- (iii) $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$.

Partant de ce constat, on cherche à écrire l'équation en temps discret suggérant une équation sur les incréments de X

$$\frac{X_{t_{k+1}} - X_{t_k}}{t_{k+1} - t_k} = b(t_k, X_{t_k}) + \sigma(t_k, X_{t_k})W_{t_k}.$$

Le processus W n'étant pas raisonnable, on peut le remplacer par un incrément de B dans la version discrète sous la forme

$$\frac{X_{t_{k+1}} - X_{t_k}}{t_{k+1} - t_k} = b(t_k, X_{t_k}) + \sigma(t_k, X_{t_k}) \frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{t_{k+1} - t_k},$$

et on est ramené à

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

On peut alors penser cette équation en version intégrale

$$X_t - X_0 = \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

ou en version différentielle

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

L'intégrale d'Itô est justement l'objet impliquant les incréments de B et la notation

$$\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

ne se réfère pas à une intégrale classique de type Stieljes (voir exercice ??). La version différentielle est simplement une notation simplifiée de la version intégrale, et on l'utilisera en connaissance de cause, parfois avec des règles pratiques de calcul. Notez qu'on rencontre généralement l'assertion suivante : "Le bruit blanc W est la dérivée du mouvement Brownien B ". Cet objet W sera abordé au chapitre 4.

2.2. Construction de l'intégrale d'Itô.

2.3. Propriétés de l'intégrale d'Itô.

2.4. Formule d'Itô. La formule d'Itô est à la base du calcul stochastique car elle exprime la stabilité d'une certaine classe de processus à travers des transformations régulières. Elle fournit d'ailleurs des règles de calculs permettant de représenter le nouveau processus obtenu après transformation. C'est pour cette raison qu'on parle de "Formule d'Itô".

Définition 2.1. Soient S et T deux instants de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{V}(S, T)$ l'ensemble des processus stochastiques f définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexés par $[S, T]$, satisfaisant les propriétés suivantes :

- $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ est $\mathcal{B}([S, T]) \times \mathcal{F}$ mesurable.
- $f(t, \cdot)$ est $\mathcal{F}_t$ adaptée.
- $\mathbb{E} \left[\int_S^T f(t, \cdot)^2 dt \right] < +\infty$.

Définition 2.2. On note également $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$ l'ensemble des processus stochastiques f définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{H}_t$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexés par $[S, T]$, satisfaisant les propriétés suivantes :

- $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ est $\mathcal{B}([S, T]) \times \mathcal{F}$ mesurable.
- B_t est une martingale pour $\mathcal{H}_t$ et $f(t, \cdot)$ est $\mathcal{H}_t$ adaptée.
- $\mathbb{P} \left[\int_S^T f(t, \cdot)^2 dt < +\infty \right] = 1$

On notera $\mathcal{W}^{\mathcal{H}} = \cap_{T>0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$.

Définition 2.3. Un processus d'Ito est un processus stochastique définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexés par $\mathbb{R}_+$, pouvant s'écrire de la manière suivante :

$$(2) \quad X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \cdot) ds + \int_0^t v(s, \cdot) dB_s,$$

Avec $v \in \mathcal{W}^{\mathcal{H}}$ et $\mathbb{P} \left[\int_0^t |u(s, \cdot)| ds < +\infty, \forall t \geq 0 \right] = 1$. On le notera synthétiquement $dX_t = u dt + v dB_t$ avec pour donnée initiale X_0 .

Théorème 2.4 (Formule d'Itô 1-dimensionnelle). Soit X un processus d'Itô donné par :

$$(3) \quad dX_t = u dt + v dB_t$$

Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors le processus stochastique $Y_t = g(t, X_t)$ est encore un processus d'Itô et l'on a :

$$(4) \quad dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) v^2 dt$$

Cette formule se généralise au cas multidimensionnel où B est de dimension $m \in \mathbf{N}$, un processus d'Ito de dimension d s'écrit encore :

$$(5) \quad dX_t = u dt + v dB_t$$

Où $u = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur dont les coordonnées vérifient les conditions de la définition 2.1, il en va de même pour les coordonnées de la matrice $v = (v_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$.

Théorème 2.5 (Formule d'Itô multidimensionnelle). Soit X un processus multidimensionnel défini en équation (5), $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ (i.e. $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$). Alors le processus Y défini par $Y(t, \omega) = g(t, X(t, \omega))$ est encore un processus d'Itô dont la k -ième composante est donnée par :

$$(6) \quad dY_t^k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) (v^T v)_{i,j} d\langle B^i, B^j \rangle_t.$$

2.5. Exercices sur le chapitre 2.

Exercice 2.1. Vérifier si les processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ suivants sont des $\mathcal{F}_t$ martingales.

- a) $X_t = B_t + 4t$,
- b) $X_t = B_t^2$,
- c) $X_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t s B_s ds$.

Exercice 2.2. Montrer que les processus X_t suivants sont bien définis dans l'espace considéré en tant que processus d'Itô. C'est-à-dire montrer qu'il existe deux processus u et v vérifiant les conditions habituelles tels que $X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \cdot) ds + \int_0^t v(s, \cdot) dW_s$, où W est un mouvement Brownien multi-dimensionnel à préciser.

- a) Dans $\mathbb{R}$, $X_t = B_t^4 - B_t^2 - \int_0^t \sqrt{|B_s|} dB_s$, pour $t \in \mathbb{R}$.
- b) Dans $\mathbb{R}$, $X_t = t B_t - \int_0^t s dB_s$, pour $t \in \mathbb{R}$.
- c) Dans $\mathbb{R}$, $X_t = \cos(B_t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.
- d) Dans $\mathbb{R}^d$, $X_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t B_s^{k+1} dB_s^k u_k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- e) Dans $\mathbb{R}^d$, $X_t = \sum_{k=1}^d \left(\int_0^t B_s^k dB_s^k - (B_t^k)^2 \right) u_k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.3 (Théorème de représentation d'Itô). Soit V un processus de $L^2(\Omega)$ sur $[0, T]$ qui soit une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. On veut montrer qu'il existe un processus $v \in \mathcal{V}$ tel que

$$(\star) \quad V_T(\omega) = \mathbb{E}[V_0] + \int_0^T v(t, \omega) dB_t \text{ pour presque tout } \omega \in \Omega.$$

- a) Supposons que $V_T = \exp \left(\int_0^T f(t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T f^2(t) dt \right)$ pour une fonction f dans $L^2(0, T)$. Montrer que $(\star)$ est vérifiée.

On peut montrer que la limite simple d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{V}$ qui soit de Cauchy dans $L^2(\Omega \times [0, T])$ admet une sous-suite qui soit convergente dans $\mathcal{V}$.

- b) Supposons qu'il existe une séquence de processus $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme décrite en question a) telle que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers V dans $L^2(\Omega)$. Montrer que

$$V_T = \mathbb{E}[V] + \int_0^T \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dB_t$$

où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega \times [0, T])$.

- c) En déduire le théorème de représentation (i.e. la décomposition $(\star)$) pour un tel processus V .
- d) Montrer l'unicité du processus v représentant V dans $(\star)$.

Exercice 2.4 (Intégrale de Stratonovich). Soit $f \in \mathcal{V}$. Supposons que $t \mapsto f(t, \omega)$ soit continue pour presque tout ω . On sait que

$$\int_0^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} f(t_j, \omega) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}).$$

De manière similaire, on peut définir l'intégrale de Stratonovich avec $t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1})$ par

$$\int_0^T f(t, \omega) \circ dB_t(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} f(t_j^*, \omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}),$$

Comparer

$$\int_0^T B_t \circ dB_t \text{ et } \int_0^T B_t dB_t.$$

3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

On note $E(b, \sigma, x)$ l'équation différentielle stochastique définie par

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

sous la condition $X_0 = x$.

3.1. Définition des solutions.

Définition 3.1. *Il existe plusieurs notions d'existence de solution aux équations différentielles stochastiques.*

- On dit qu'il y a existence faible si pour toute donnée initiale x , il existe une solution de $E(b, \sigma, x)$.
- On dit qu'il y a existence et unicité faibles si pour tout x , les solutions de $E(b, \sigma, x)$ ont toutes la même loi.
- On dit qu'il y a unicité trajectorielle si pour tout x , deux solutions X et $\tilde{X}$ de $E(b, \sigma, x)$ sont indistingables l'une de l'autre, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$.
- On dit qu'une solution faible X est solution forte si X est adapté à la filtration engendrée par B .

Théorème 3.2 (Yamada-Watanabe). *S'il y a existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a existence et unicité faibles. De plus, pour tout choix de l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ et du mouvement Brownien B qui soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ adapté, pour tout donnée initiale x , il existe une solution forte de $E(b, \sigma, x)$.*

3.2. Existence et unicité.

Théorème 3.3. *Supposons que*

H1 : Les fonctions b et σ sont continues.

H2 : Les fonctions b et σ sont lipschitziennes par rapport à leur seconde variable uniformément en la variable t , c'est-à-dire $\exists L \geq 0$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in \mathbb{R}^d$ on ait

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|,$$

alors il y a existence faible et unicité trajectorielle de l'équation $E(b, \sigma, x)$ (donc existence forte par le théorème de Yamada-Watanabe).

3.3. Exercices sur le chapitre 3.

Exercice 3.1. *Soient b et σ deux fonctions régulières telles que toutes les intégrales suivantes existent. Si pour tout $t \in [0, T]$, le processus X_t est la solution de*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s$$

alors X_t est le processus d'Itô solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x \sigma(s, X_s) \sigma(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Transformer les équations différentielles stochastiques au sens de Stratonovich en équations différentielles stochastiques au sens d'Itô et inversement.

- a) $dX_t = \gamma X_t dt + \alpha X_t \circ dB_t$
- b) $dX_t = \sin(X_t) \cos(X_t) dt + (t^2 + \cos(X_t)) \circ dB_t$
- c) $dX_t = \delta X_t dt + \beta X_t dB_t$
- d) $dX_t = 2 \exp(-X_t) dt + X_t^2 dB_t$

où α, β, γ et δ sont des constantes.

Exercice 3.2. Calculer les solutions des équations différentielles suivantes où α , β et γ sont des constantes.

- a) $dX_t = \alpha X_t dt + \beta dB_t$ et $X_0 = 1$,
- b) $dX_t = \frac{1}{2}\gamma^2 X_t dt + \gamma X_t dB_t$ et $X_0 = 1$,
- c) $dX_t = -\frac{X_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dB_t$ et $X_0 = 0$.

Exercice 3.3. Que dire de l'existence de solutions aux équations différentielles stochastiques suivantes ?

- a) $dX_t = (\sin(B_t)^2 - X_t)dt - 2\sin(B_t)\cos(B_t)dB_t$ et $X_0 = 1$,
- b) $dX_t = \frac{1}{3}X_t^{1/3}dt + X_t^{2/3}dB_t$ et $X_0 = 1$,
- c) $dX_t = 3\frac{X_t}{B_t}dB_t + 3\frac{X_t}{B_t^2}dt$ et $X_0 = 0$,

où α , β et γ sont des constantes. Exhiber une solution. Discuter de l'unicité des solutions.

Exercice 3.4. Soit $f \in \mathcal{V}$. On définit un processus tel que

$$X_t = \exp\left(\int_0^t f(s, \omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s, \omega)^2 ds\right).$$

et on suppose que $X_t f(t, \cdot) \in \mathcal{V}$.

- a) Montrer que le processus X_t vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = X_t f(t, \cdot)dB_t$$

- b) En déduire que X_t est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sur $[0, T]$.

Exercice 3.5. On se place sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ avec les conditions aux bords de Dirichlet homogènes. On pose Δ le Laplacien défini par la réalisation de l'opérateur de dérivée seconde sur cet espace. Cet opérateur possède alors une famille dénombrable de valeurs propres données par $(k^2\pi^2)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs propres associés $(\sin(k\pi))_{k \in \mathbb{N}}$. On se place sur l'espace de dimension d engendré par $(\sin(k\pi))_{k \in [1 \dots d]}$. Sur cet espace le Laplacien est représenté par une matrice A diagonale. On cherche alors à résoudre l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = AX_t dt + IdB_t$$

où B est un mouvement Brownien en dimension d et I est la matrice identité. Montrer que la solution de l'équation différentielle stochastique $E(A, I, x)$ est donnée par

$$X_t = \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-s)A)dB_s.$$

4. PROCESSUS DE WIENER CYLINDRIQUE

Le formalisme obtenu en dimension finie semble naturellement s'adapter à la dimension infinie en passant à la limite sur la dimension d de l'espace $\mathbb{R}^d$ engendré par la base canonique $(e_k)_{k=1\dots d}$. De fait l'extension semble simple sur un espace possédant une "base" dénombrable. Les espaces de Hilbert séparables semblent alors être le cadre idéal. Surtout lorsqu'on pense aux espaces de Sobolev $W^{n,p}$ qui étaient déjà le cadre adapté aux approches variationnelles des équations aux dérivées partielles. On a donc une table d'extension :

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & (e_k)_{k=1\dots d} \rightarrow (e_k)_{k \in \mathbb{N}} \\
 (8) \quad & X_t = \sum_{k=1\dots d} X_t^k e_k \rightarrow X_t = \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d X_t^k e_k \\
 (9) \quad & X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d) \rightarrow X_t \in H \\
 (10) \quad & AX_t = \sum_{k=1\dots d} X_t^k A e_k = \sum_{k=1\dots d} X_t^k (k\pi)^2 e_k \rightarrow AX_t = \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d X_t^k (k\pi)^2 e_k \\
 (11) \quad & B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d) \rightarrow \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d B_t^k e_k
 \end{aligned}$$

De cette table, on remarque premièrement que si la série (8) converge, il n'est rien de sûr vis-à-vis de la série (10), mais ce n'est pas le problème fondamental. Par contre la série (11) semble problématique. Si on se fixe $\omega \in \Omega$, alors la série converge dans H (l'espace de Hilbert engendré par la base hilbertienne orthonormée) si et seulement si

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d (B_t^k(\omega))^2 < +\infty$$

pour un instant $t \in [0, T]$. Or il est clair que $\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^d (B_t^k(\omega))^2 \right] = \mathbb{V} \left[\sum_{k=1}^d B_t^k(\omega) \right] = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left[(B_t^k(\omega))^2 \right] = \sum_{k=1}^d t = d \times t$. Cette quantité est donc infinie lorsque $d \rightarrow +\infty$. Et par la loi forte des grands nombres, lorsque $d \rightarrow +\infty$ on a presque sûrement

$$\sum_{k=1}^d (B_t^k(\omega))^2 \sim d \times t$$

qui diverge, et la série n'a donc pas de sens dans H . Dans la suite de ce chapitre, on va introduire une manière de se représenter cette série qui porte le nom de processus de Wiener cylindrique dans H .

4.1. Processus Gaussien isonormal. On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un espace de Hilbert séparable H doté d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et d'une norme associée $|\cdot|_H$. On note $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée complète dans H , c'est-à-dire une base hilbertienne orthonormée de H . On note également $L^2(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert.

Définition 4.1. On appelle processus Gaussien isonormal sur H la donnée d'une fonction

$$\mathcal{W} : H \rightarrow L^2(\Omega).$$

(qu'on peut voir comme un processus indexé sur H) tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(h_1, \dots, h_n) \in H^n$, le vecteur de variables aléatoires $(\mathcal{W}(h_1), \dots, \mathcal{W}(h_n))$ est un vecteur Gaussien centré.

— Pour tout $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$, la covariance de $\mathcal{W}(h_1)$ et $\mathcal{W}(h_2)$ est donnée par

$$\mathbb{E}[\mathcal{W}(h_1)\mathcal{W}(h_2)] = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathbf{H}}.$$

Un processus Gaussien de ce type est entièrement caractérisé par sa fonction moyenne (ici identiquement nulle) et sa fonction de covariance. On parle de bruit blanc car la covariance est représentée par l'opérateur identité sur $\mathbf{H}$. Voici une manière de construire un processus Gaussien isonormal sur $\mathbf{H}$.

Proposition 4.2. *Soit $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées sous la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathbf{H}$. On construit la fonction $\mathcal{W}$ sur cette base par la formule $\mathcal{W}(e_k) = \beta_k$ qu'on étend ensuite par linéarité à toute fonction $h \in \mathbf{H}$ par*

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \mathcal{W}: h &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle h, e_k \rangle \beta_k. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{W}$ définit un processus Gaussien isonormal.

Démonstration. Il est clair que la série tronquée est Gaussienne, et qu'il suffit de montrer que ce caractère Gaussien passe à la limite dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Il est clair aussi que la moyenne de $\mathcal{W}$ est nulle pour tout $h \in \mathbf{H}$ car toutes les variables aléatoires sont centrées. Il reste donc à vérifier la fonction de covariance. Par polarisation, il suffit de faire le calcul de $\mathbb{E}[\mathcal{W}(h)\mathcal{W}(h)]$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{W}(h)^2] &= \mathbb{E} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k, l \leq N} h_k h_l \eta_k \eta_l = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \sum_{1 \leq k, l \leq N} h_k h_l \eta_k \eta_l \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k, l \leq N} h_k h_l \mathbb{E}[\eta_k \eta_l] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k \leq N} (h_k)^2 = |h|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

□

On comprend le lien fort entre un processus Gaussien isonormal et la série divergente du début du chapitre. Par exemple, à $t = 1$ fixé, la famille $(B_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ permet de définir un processus Gaussien isonormal. Inversement, on peut construire le mouvement Brownien grâce aux processus Gaussien isonormaux de la manière suivante.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{W}$ un processus Gaussien isonormal sur $\mathbf{L}^2([0, T])$. On pose $B_t = \mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0, t]})$. Alors (il existe une version telle que) $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement Brownien.*

Démonstration. B est évidemment Gaussien avec $B(0) = 0$. Il possède des incréments stationnaires et la loi de B_t est $\mathcal{N}(0, t)$. L'indépendance des incréments est assurée par le caractère Gaussien dès lors que la covariance des incréments est nulle. Il suffit donc de calculer sa covariance pour conclure, or

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[\mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0, t]})\mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0, s]})] = \langle \mathbb{1}_{[0, t]}, \mathbb{1}_{[0, s]} \rangle_{\mathbf{L}^2([0, T])} = \int_0^{s \wedge t} du = s \wedge t.$$

□

Cette construction est celle due à Paul Levy. On peut remarquer qu'il est naturel de définir une intégrale stochastique sous la forme

$$\int_0^T h(t) dB_t := \mathcal{W}(h)$$

définie pour toute fonction (déterministe) $h \in L^2([0, T])$. Cette intégrale est une variable aléatoire Gaussienne qui satisfait une isométrie d'Itô sous la forme

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T h(t) dB_t \right|^2 \right] = \int_0^T h(t)^2 dt.$$

4.2. Bruit blanc espace-temps.

Définition 4.4. Soit $\mathcal{W}$ un processus Gaussien isonormal sur $H = L^2([0, T] \times \mathcal{D})$. On définit

$$\begin{aligned} W : [0, T] \times L^2(\mathcal{D}) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ (t, f) &\mapsto \mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0,t]} \otimes f). \end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in [0, T]$ fixé, $\frac{1}{\sqrt{t}}W(t, \cdot)$ est un processus Gaussien isonormal sur $L^2(\mathcal{D})$. On parle alors de bruit blanc en espace à t fixé.

Proposition 4.5. Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne orthonormée de $L^2(\mathcal{D})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $\beta_k : t \in [0, T] \mapsto W(t, e_k)$. Alors :

— Les processus $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des mouvements Browniens indépendants.

— Pour tout $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k e_k \in L^2(\mathcal{D})$, on a (presque sûrement)

$$W(t, f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k(t) f_k.$$

Démonstration. Il est clair que les β_k sont des processus Gaussiens centrés car

$$\beta_k(t) = \mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0,t]} \otimes e_k)$$

est Gaussienne par définition de $\mathcal{W}$. Puis on a la formule de covariance espace-temps suivante. Soient $k, m \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, T]$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\beta_k(t)\beta_m(s)] &= \mathbb{E}[\mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0,t]} \otimes e_k)\mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0,s]} \otimes e_m)] \\ &= \langle \mathbb{1}_{[0,t]} \otimes e_k, \mathbb{1}_{[0,s]} \otimes e_m \rangle_{L^2([0,T] \times \mathcal{D})} \\ &= (t \wedge s) \langle e_k, e_m \rangle_{L^2(\mathcal{D})}^2 = (t \wedge s) \delta_{k,m}. \end{aligned}$$

Par le caractère Gaussien, l'indépendance entre $\beta_k(s)$ et $\beta_m(t)$ pour $k \neq m$ est immédiate. Il s'en suit que les processus sont indépendants. Enfin pour $k = m$ le calcul de covariance en temps prouve que les processus sont des mouvements browniens. Sur le sous-espace $\text{Vect}(e_1, \dots, e_d)$ l'égalité est immédiate par linéarité de $W(t, \cdot)$. On passe alors à la limite quand $d \rightarrow +\infty$ et la convergence de la série a lieu dans $L^2(\Omega)$. $\square$

On cherche toujours à construire un objet infini-dimensionnel qui serait l'extension de la série $\sum_{k=1}^d \beta_k(t) e_k$ lorsque $d \rightarrow +\infty$. Pour le moment on sait construire un objet à valeur dans $L^2(\Omega)$, mais on aimerait qu'il soit à valeurs dans $L^2(\Omega \times \mathcal{D})$.

Définition 4.6. Soit W un bruit blanc en espace sur $[0, T] \times L^2(\mathcal{D})$. On définit

$$W(t) := \sum_{k \in \mathbb{N}} W(t, e_k) e_k$$

le processus de Wiener sur H .

Il est clair que si l'espace $L^2(\mathcal{D})$ était remplacé $\mathbb{R}^d$ ou $Vect(e_1, \dots, e_d)$. Tous les objets sont bien définis, et la série précédente converge dans l'espace. On obtient tout simplement un mouvement Brownien en dimension d , d'où encore l'appellation cylindrique. Toutefois, en dimension infinie, la série précédente est formelle car il n'y a pas convergence dans $L^2(\mathcal{D})$ de la série. Cette singularité peut-être levée en remarquant que la série est convergente dans n'importe quel autre espace de Hilbert $\tilde{H}$ telle que l'injection $i : H \rightarrow \tilde{H}$ est Hilbert-Schmidt.

Définition 4.7 (Opérateurs Hilbert-Schmidt). *Soit H et $\tilde{H}$ deux espace de Hilbert séparables, et $L \in \mathcal{L}(H, \tilde{H})$ un opérateur linéaire borné. On dit que L est Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne orthonormée $(e_k)_{k \in I}$ of H , où $I \subset \mathbb{N}$, telle que*

$$\sum_{k \in I} |Le_k|_{\tilde{H}}^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la valeur précédente est finie pour n'importe quelle autre base hilbertienne orthonormée, et elle ne dépend pas du choix de cette base. On la note alors

$$\|L\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 = \sum_{k \in I} |Le_k|_{\tilde{H}}^2,$$

car elle définit une norme sur le sous espace vectoriel des opérateurs Hilbert-Schmidt noté $\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})$ qui en fait un espace de Hilbert.

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont fortement reliés aux opérateurs de trace finie qui jouent un rôle central dans la théorie. En effet L est Hilbert-Schmidt si et seulement si LL^* ou L^*L sont des opérateurs de trace finie.

Définition 4.8 (Opérateurs de trace finie). *Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur linéaire. On dit qu'il est à trace finie si la quantité*

$$Tr(T) = \sum_{k \in I} \langle Te_k, e_k \rangle_H$$

est finie. Dans ce cas, la valeur précédente est finie pour n'importe quelle autre base hilbertienne orthonormée, et elle ne dépend pas du choix de cette base.

Le lien entre les opérateurs de trace finie, et les opérateurs de Hilbert-Schmidt est fait à travers la formule

$$\|L\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 = \sum_{k \in I} |Le_k|_{\tilde{H}}^2 = \sum_{n \in I} \langle Le_k, Le_k \rangle_{\tilde{H}} = \sum_{k \in I} \langle L^*Le_k, e_k \rangle_H = Tr(L^*L).$$

En fait la trace définit un produit scalaire sur les opérateurs de trace finie, et le complété pour la norme associée est l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Exemple 4.9. *L'injection $i : L^2(\mathcal{D}) \rightarrow H^{-s}(\mathcal{D})$ est Hilbert-Schmidt pour $s > d/2$.*

La série formelle définissant le bruit blanc espace W a en réalité un sens à travers un opérateur Hilbert-Schmidt. Effectivement, on peut définir l'action de cet opérateur sur le bruit blanc espace W de la manière suivante.

Proposition 4.10. *Soit $L \in \mathcal{L}_2(H, \tilde{H})$, alors*

$$LW(t) = \sum_{k \in I} \beta_k(t) Le_k$$

est bien définie dans $L^2(\Omega; \tilde{H})$ l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable à valeur dans $\tilde{H}$. De plus cette quantité ne dépend pas de la base hilbertienne orthonormée choisie pour construire W .

Exemple 4.11. Soit $h \in H$ définissant la forme linéaire

$$\langle h, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}.$$

Alors cette forme linéaire est Hilbert-Schmidt, et sa norme d'opérateur Hilbert-Schmidt est égale à $\|\langle h, \cdot \rangle\|_{\mathcal{L}_2(H, \mathbb{R})} = |h|_H$. Par suite $\langle h, W(t) \rangle$ est une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On a l'égalité $\langle h, W(t) \rangle = \mathcal{W}(t, h)$, et le processus de Wiener W est fortement relié au bruit blanc en espace $\mathcal{W}$.

Exemple 4.12. Soient $H \subset \tilde{H}$ telle que l'injection $i : H \rightarrow \tilde{H}$ soit un opérateur linéaire Hilbert-Schmidt. Alors à t fixé $W(t)$ peut-être identifié avec $i(W(t)) \in \tilde{H}$, qui est bien défini par une série convergente dans $\tilde{H}$. De plus les propriétés de cet objet ne dépendent pas du choix de $\tilde{H}$ et de l'injection i . Enfin, étant donné H un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne orthonormée $(e_k)_{k \in I}$, il existe toujours $\tilde{H}$ un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne orthonormée $(\tilde{e}_k)_{k \in I}$ tel que l'injection $i : H \rightarrow \tilde{H}$ définie par linéarité avec $i(e_k) = \frac{1}{k} \tilde{e}_k$ est Hilbert-Schmidt.

4.3. Intégrale stochastique contre un bruit blanc espace-temps. Comme on a pu le faire pour les intégrales classiques d'Itô, ou les intégrales définies pour un processus Gaussien isonormal sur $L^2([0, T])$, il suffit de définir une intégrale contre des processus élémentaires, et de passer ensuite à la limite à l'aide de l'isométrie.

Proposition 4.13. Soit $L : t \in [0, T] \mapsto \mathcal{L}(H, \tilde{H})$ une fonction indexée par le temps à valeur dans les opérateurs linéaires et W un processus de Wiener cylindrique sur H . Supposons que

$$\int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 dt < +\infty$$

(qui est une intégrale classique au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \cup +\infty$) alors on peut définir

$$\int_0^T L(t) dW_t := \sum_{m \in I_{\tilde{H}}} \sum_{k \in I_H} \int_0^T \langle L(t) e_k, \tilde{e}_m \rangle_{\tilde{H}} d\beta_k(t) \tilde{e}_m,$$

où $(e_k)_{k \in I_H}$ and $(\tilde{e}_k)_{k \in I_{\tilde{H}}}$ sont respectivement des bases hilbertiennes orthonormées de H et $\tilde{H}$. Dans ce cas cette quantité ne dépend pas du choix des bases hilbertiennes orthonormées choisies. De plus on a l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T L(t) dW_t \right|_{\tilde{H}}^2 \right] = \int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 dt,$$

ce qui prouve par l'hypothèse sur la finitude de cette quantité que l'intégrale est bien un objet à valeurs dans $L^2(\Omega; \tilde{H})$.

Démonstration. L'objet défini par la série n'implique que des quantités classiques. La série est convergente dans $\tilde{H}$. Reste à vérifier l'isométrie d'Itô en utilisant l'isométrie d'Itô contre

un mouvement Brownien en dimension 1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T L(t) dW_t \right|_{\tilde{H}}^2 \right] &= \sum_{m \in I_{\tilde{H}}} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \in I_H} \int_0^T \langle L(t) e_k, \tilde{e}_m \rangle d\beta_k(t) \right|^2 \right] \\
&= \sum_{m \in I_{\tilde{H}}} \sum_{k \in I_H} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \langle L(t) e_k, \tilde{e}_m \rangle d\beta_k(t) \right|^2 \right] \\
&= \sum_{m \in I_{\tilde{H}}} \sum_{k \in I_H} \int_0^T |\langle L(t) e_k, \tilde{e}_m \rangle|^2 dt \\
&= \sum_{k \in I_H} \int_0^T |L(t) e_k|_{\tilde{H}}^2 dt \\
&= \int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 dt.
\end{aligned}$$

□

5. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES LINÉAIRES DIRIGÉES PAR UN BRUIT BLANC ESPACE-TEMPS

5.1. Semi-groupe pour les équations aux dérivées partielles linéaires. Dans un cadre purement déterministe, la théorie des opérateurs permet d'établir un résultat d'existence et d'unicité de solution d'une équations aux dérivées partielles à travers des propriétés de dissipation d'énergie. Techniquement on souhaite relier la solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(12) \quad \begin{cases} X'(t) &= AX(t) \\ X(0) &= x \in K. \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire d'un espace de Banach K , à l'existence d'un flot $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que $X(t) = S(t)x$.

Définition 5.1. Soit K un espace de Banach, on dit que la famille d'opérateurs $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ forme un semi-groupe fortement continu si

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $S(t) \in \mathcal{L}(K, K)$,
- $S(0) = Id_{\mathcal{L}(K, K)}$,
- Pour tout s et $t \in \mathbb{R}_+$, $S(t + s) = S(t)S(s)$,
- Pour tout $x \in K$, $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$.

On dit qu'il est "de contraction" lorsque $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(K, K)} \leq 1$.

D'un semi-groupe, on peut extraire un opérateur linéaire A défini sur un sous-ensemble $D(A)$ de K qu'on appelle le domaine de l'opérateur A . C'est ce qu'on appelle le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Définition 5.2. Soit K un espace de Banach et $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un semi-groupe fortement continu. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe, la donnée du couple $(A, D(A))$ telle que

$$D(A) := \left\{ x \in K : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$A : \begin{array}{ccc} D(A) & \rightarrow & K \\ x & \mapsto & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \end{array}$$

Remarque 5.3. Lorsque $A \in \mathcal{L}(K, K)$ est donné et est tel que la série $\exp(tA)$ existe et forme un semi-groupe fortement continu, tel que $D(A) = K$ alors le générateur infinitésimal du semi-groupe est donné par $(A, D(A))$. Pour cette raison, abusivement on note parfois $S(t) = \exp(tA)$.

Théorème 5.4 (Régularité du semi-groupe). Soit K un espace de Banach et $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un semi-groupe fortement continu de contraction avec $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal, alors

- Pour tout $x \in K$, le flot $t \mapsto S(t)x$ appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; K)$.
- Pour tout $x \in D(A)$, le flot $X : t \mapsto S(t)x$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; D(A))$ et vérifie

$$X'(t) = (S(t)x)' = AX(t) = AS(t)x.$$

Théorème 5.5 (Existence et Unicité des solutions). Soit $A : D(A) \subset K \rightarrow K$ un opérateur linéaire, on a l'équivalence

- $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, qui est de contraction.
- $D(A)$ est dense et pour toute condition initiale $x \in D(A)$, il existe une unique solution $X : t \mapsto X(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; K)$ de l'équation (12).

De plus dans ce cas, on a $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; D(A))$ et cette solution vérifie

$$\|X(t)\|_K \leq \|x\|_K \quad \text{et} \quad \|X'(t)\|_K \leq \|AX(t)\|_K \leq \|Ax\|_K.$$

Définition 5.6 (Opérateurs maximaux dissipatifs). *Un opérateur A sur un domaine $D(A) \subset K$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, pour tout $\lambda > 0$, $\|x - \lambda Ax\|_K \geq \|x\|_K$. S'il vérifie de plus que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id_K - \lambda A$ est surjectif, on dit qu'il est maximal dissipatif.*

On peut montrer plusieurs résultats associés aux opérateurs dissipatifs.

Proposition 5.7. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif,*

- *alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id_K - \lambda A$ est injectif.*
- *S'il existe $\lambda_0 > 0$, tel que l'opérateur $Id_K - \lambda_0 A$ est surjectif alors $(A, D(A))$ est maximal dissipatif.*
- *Si K est un espace de Hilbert, alors c'est équivalent de montrer que pour tout $x \in D(A)$, $\Re(\langle Ax, x \rangle) \leq 0$.*
- *Si $(A, D(A))$ est maximal dissipatif alors $Id_K - \lambda A$ est un isomorphisme dans $\mathcal{L}(D(A), K)$. On note $J_\lambda = (Id_K - \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A .*

Théorème 5.8 (Hille-Yosida). *Soit K un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(K, K)$ défini sur $D(A)$. On a l'équivalence entre*

- *$(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu qui est de contraction.*
- *$(A, D(A))$ est maximal dissipatif à domaine $D(A)$ dense dans K .*

Si K est un espace de Hilbert, la condition de densité peut être relaxée.

On obtient directement une caractérisation des solutions d'une équation aux dérivées partielles si l'espace de Banach K est un espace de Hilbert noté H . Dès que $(A, D(A))$ est maximal dissipatif, alors par le théorème 5.8, il est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction. Ainsi par le théorème 5.5 pour toute condition initiale $x \in D(A)$ (qui est bien dense dans H) il existe une unique solution $X : t \mapsto X(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; H)$ de l'équation (12). Et par le théorème 5.4 on peut l'écrire sous la forme $X : t \mapsto S(t)x$. Cette forme s'étend naturellement à l'espace H tout entier par continuité et densité, ce qui pourrait permettre de définir une forme de solution, a priori non dérivable.

Il existe également une forme de solution qu'on appelle faible et qui utilise l'adjoint de l'opérateur A .

Définition 5.9 (Opérateur Adjoint). *Soit $(A, D(A))$ un opérateur de $\mathcal{L}(K, K)$ tel que $D(A)$ est dense dans K . On appelle opérateur adjoint la donnée du couple $(A^*, D(A^*))$ telle que*

$$D(A^*) := \{\xi \in K' : \exists C_\xi \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in D(A), \langle \xi, Ax \rangle_{K', K} \leq C_\xi \|x\|_K\}$$

et

$$A^* : \begin{array}{ccc} D(A^*) & \rightarrow & K' \\ \xi & \mapsto & A^*\xi := \begin{cases} K & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \langle \xi, Ax \rangle_{K', K} \end{cases} \end{array}$$

Remarque 5.10. *Notez bien que pour que cette définition soit valide, la forme linéaire $A^*\xi$ doit bien être définie sur K tout entier. Mais pourtant l'opérateur A n'agissant que sur $D(A)$, sa définition n'est valide que sur le sous-ensemble $D(A)$ de K . On peut tout à fait prolonger sa définition sur K tout entier (par exemple en mettant la valeur 0 sur $K \setminus D(A)$, mais on n'obtiendrait pas un prolongement adéquat). Par la définition de $D(A^*)$ on sait que la forme linéaire $A^*\xi$ est continue de norme C_ξ , et donc on veut prolonger $A^*\xi$ par continuité. C'est la condition de densité de $D(A)$ dans K qui permet de définir un prolongement continu de $A^*\xi$ sur K tout entier. On note abusivement ce prolongement $A^*\xi$ et la définition devient valide.*

On peut alors transposer l'équation (12) sous une forme faible.

Définition 5.11 (Solution faible). *Soit $(A, D(A))$ un opérateur de $\mathcal{L}(K, K)$ tel que $D(A)$ est dense dans K . Soit X une fonction de $[0, T]$ à valeurs dans un espace de Banach K . On dit que X est une solution faible de l'équation (12) si pour tout instant $t \in [0, T]$ et pour tout $\xi \in D(A^*)$ on a*

$$\langle \xi, X(t) \rangle_{K', K} = \langle \xi, x \rangle_{K', K} + \int_0^t \langle A^* \xi, X(s) \rangle_{K', K} ds.$$

Proposition 5.12. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur maximal dissipatif à domaine $D(A)$ dense dans K , et X l'unique solution régulière de l'équation (12) pour la donnée initiale $x \in D(A)$. Alors X est une solution faible de l'équation (12).*

5.2. Semi-groupe pour les équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires dirigées par un bruit blanc espace-temps. On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles dans un espace de Hilbert H . Elle pourrait s'écrire sous la forme abstraite

$$(13) \quad dX_t = AX_t dt + dW_t,$$

avec une condition initiale $X_0 \in H$, $(W(t))_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener cylindrique sur H et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire. On va supposer que A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \in [0, T]}$, ou que l'opérateur A est maximal dissipatif. L'existence de solutions semble assurée si on sait transposer le flot des solutions avec une méthode de variation de la constante. On a la proposition suivante, qui est également une définition de la convolution stochastique.

Proposition 5.13. *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire qui génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \in [0, T]}$ tel que*

$$(14) \quad \int_0^T \|S(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, H)}^2 dt < +\infty.$$

alors pour tout $t \in [0, T]$ l'objet

$$\int_0^t S(t-s) dW_s$$

existe dans $L^2(\Omega; H)$ et est appelé convolution stochastique entre S et W , souvent noté W_A .

La proposition 5.13 semble indiquer qu'une solution existe via une méthode de variation de la constante, mais sous une forme impliquant une intégrale en temps. En effet on a la définition suivante :

Définition 5.14 (Solution mild). *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire qui génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \in [0, T]}$ tel que l'équation (14) est vérifiée. On appelle "solution mild" le processus stochastique dans H indexé par $[0, T]$ tel que*

$$X^{mild} : \begin{array}{ll} [0, T] & \rightarrow L^2(\Omega; H) \\ t & \mapsto S(t)x + \int_0^t S(t-s) dW_s. \end{array}$$

Le terme de "solution mild" se réfère à une notion de solution un peu plus forte que la notion de solution faible classique, dont voici la définition. En français, on parle de solution intégrale ou de solution douce, mais le terme anglais "mild" est beaucoup plus usité.

Définition 5.15 (Solution faible). *Soit $T \in \mathbb{R}_+$ et $(X(t))_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique à valeur dans H , on dit que X est une solution faible de l'équation (13) si pour tout instant $t \in [0, T]$ et pour tout $\xi \in D(A^*)$ on a*

$$\langle \xi, X(t) \rangle = \langle \xi, x \rangle + \int_0^t \langle A^* \xi, X(s) \rangle ds + \langle \xi, W(t) \rangle.$$

Proposition 5.16. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur maximal dissipatif à domaine $D(A)$ dense dans H , et X^{mild} la “solution mild” de donnée initiale $x \in D(A)$. Alors X^{mild} est aussi une solution faible de l’équation (13). De plus*

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E} \|X(t)\|_H^2 = \int_0^t \|S(s)\|_{\mathcal{L}_2(H, H)}^2 ds.$$

5.3. L’équation de la chaleur stochastique en domaine borné avec des conditions de Dirichlet homogènes dirigée par un bruit blanc espace-temps. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier (ici au moins de classe $\mathcal{C}^2$). On pose A la réalisation de l’opérateur Laplacien Δ dans ce domaine avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\mathcal{D}$. On sait que A est un opérateur non borné, fermé, auto-adjoint, négatif, d’inverse compact. En particulier il existe $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne orthonormée de l’espace de Hilbert $L^2(\mathcal{D})$, et une famille $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $Ae_k = -\lambda_k e_k$, c’est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $-\lambda_k$ est une valeur propre de l’opérateur A associée au vecteur propre e_k . Le domaine de l’opérateur A est $D(A) := H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$. L’opérateur A est maximal dissipatif et son domaine est dense dans $L^2(\mathcal{D})$. En effet on a

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{\mathcal{D}} \Delta x \, x = - \int_{\mathcal{D}} \nabla x \cdot \nabla x \leq 0$$

et pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $f \in L^2(\mathcal{D})$ il existe une unique solution dans $D(A)$ à l’équation

$$x - \lambda Ax = f$$

par application du théorème de Lax-Milgram. Par le théorème 5.8, $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d’un semi-groupe fortement continu qui est de contraction et qu’on note $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. Pour tout $t \in [0, T]$ ce semi-groupe est Hilbert-Schmidt. S’il vérifie l’équation (14) alors on pourra définir la convolution stochastique entre S et W un processus de Wiener cylindrique sur $L^2(\mathcal{D})$. Or $A = A^*$ d’où $S(t) = S(t)^*$, ce qui amène

$$\begin{aligned} \int_0^T \|S(t)\|_{\mathcal{L}_2(L^2(\mathcal{D}), L^2(\mathcal{D}))}^2 dt &= \int_0^T \text{Tr}(S(t)S(t)^*) dt \\ &= \int_0^T \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-2\lambda_k t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 - \exp(-2\lambda_k T)}{2\lambda_k}. \end{aligned}$$

Mais on peut obtenir un équivalent des valeurs propres du Laplacien en dimension n . Cet équivalent est donné par $\lambda_k \sim Ck^{2/n}$. De fait la série précédente n’est convergente que lorsque la dimension $n = 1$. C’est en réalité une condition nécessaire et on a le théorème suivant

Théorème 5.17. *L’équation de la chaleur linéaire, sur un domaine borné régulier $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\mathcal{D}$, perturbée par un bruit blanc espace-temps additif caractérisé par un processus de Wiener cylindrique, admet une unique solution mild dans $L^2(\mathcal{D})$ si et seulement si la dimension de l’espace $\mathcal{D}$ est $n = 1$.*

Remarque 5.18. *Lorsque la dimension $n > 1$, on peut plonger les solutions dans des espaces de Sobolev d’ordre négatif, via la théorie des distributions. Mais cette extension se généralise mal au cas non-linéaire.*

6. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES LINÉAIRES DIRIGÉES PAR UN BRUIT BLANC EN TEMPS ET À TRACE FINIE EN ESPACE

6.1. Intégrale stochastique contre une martingale dans un espace de Hilbert.

Définition 6.1 (Crochet de martingale). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit H un espace de Hilbert et $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans H telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_H^2] < +\infty$. Alors $(\|M_t\|^2)_{t \in [0, T]}$ est une sous-martingale continue et il existe un unique processus croissant continu $\mathcal{F}_t$ adapté à valeurs réelles noté $(\langle M \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ tel que $(\|M_t\|^2 - \langle M \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ soit une martingale. On appelle cet objet le crochet de la martingale.

Définition 6.2 (Crochet $\mathcal{L}^1$). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit H un espace de Hilbert et $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans H telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_H^2] < +\infty$. Alors on définit $M_t \otimes M_t$ l'opérateur linéaire

$$M_t \otimes M_t : \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H \\ h & \mapsto & j^{-1} \left(\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \langle M_t, h \rangle \langle M_t, k \rangle \end{array} \right) \end{array}$$

où j est l'isométrie depuis une réalisation du dual de H (réalisation identifiée avec H), c'est-à-dire l'application qui identifie un élément de H comme une forme linéaire sur H .

Théorème 6.3 (Métivier-Pistone). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit H un espace de Hilbert et $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans H telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_H^2] < +\infty$. Alors il existe un unique processus

croissant continu $\mathcal{F}_t$ adapté à valeurs dans les opérateurs linéaires de H auto-adjoints semi-défini positifs de trace finie, noté $(\langle \langle M \rangle \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ tel que $(M_t \otimes M_t - \langle \langle M \rangle \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ soit une martingale. De plus il existe un unique processus prévisible à valeurs dans les opérateurs linéaires de H auto-adjoints semi-défini positifs de trace finie, noté $(Q_t)_{t \in [0, T]}$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$, on a

$$\langle \langle M \rangle \rangle_t = \int_0^t Q_s d\langle M \rangle_s.$$

Enfin $Tr(Q_t) = 1$ pour presque tout $0 \leq t \leq T$, presque sûrement.

Le théorème précédent permet de faire le lien entre le carré des martingales et une forme de carré d'opérateur $(M_t \otimes M_t)$ à trace finie. En effet si on calcule la trace de ces opérateurs sur $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne orthonormée de H , on obtient que

$$\begin{aligned} Tr(M_t \otimes M_t - \langle \langle M \rangle \rangle_t) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle (M_t \otimes M_t)e_i, e_i \rangle - Tr(\langle \langle M \rangle \rangle_t) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle j((M_t \otimes M_t)e_i), e_i \rangle_{H' \times H} - Tr(\langle \langle M \rangle \rangle_t) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle M_t, e_i \rangle \langle M_t, e_i \rangle - Tr(\langle \langle M \rangle \rangle_t) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle M_t, e_i \rangle|^2 - Tr(\langle \langle M \rangle \rangle_t) \\ &= \|M_t\|_H^2 - Tr(\langle \langle M \rangle \rangle_t) \end{aligned}$$

est une martingale réelle. De fait par unicité du crochet de la martingale $(M_t)_{t \in [0, T]}$ on a l'identité

$$Tr(\langle \langle M \rangle \rangle_t) = \langle M \rangle_t$$

pour tout $t \in [0, T]$ d'où l'égalité des processus

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \text{Tr}(Q_s) d\langle M \rangle_s \quad \text{ou encore} \quad \int_0^t (\text{Tr}(Q_s) - 1) d\langle M \rangle_s = 0,$$

ce qui force bien la condition $\text{Tr}(Q_t) = 1$ pour presque tout $0 \leq t \leq T$.

Grâce à cette représentation du crochet dans $\mathcal{L}^1$, on peut définir une intégrale stochastique à valeurs dans $\mathbf{H}$ qui soit une martingale.

Définition 6.4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans $\mathbf{H}$ telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_{\mathbf{H}}^2] < +\infty$. Soit $(Q_t)_{0 \leq t \leq T}$ son crochet $\mathcal{L}^1$. Soit $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{H}$ tel que

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \langle Q_t \phi_t, \phi_t \rangle d\langle M \rangle_t < +\infty \right] = 1,$$

alors on peut définir l'intégrale stochastique de ϕ contre M pour tout $0 \leq t \leq T$ par la formule suivante,

$$\int_0^t \langle \phi_s, dM_s \rangle := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\langle \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \phi_s ds, M_{t_{j+1} \wedge t} - M_{t_j \wedge t} \right\rangle$$

où la limite est une limite en probabilité.

Cette intégrale stochastique n'est encore une fois définie que comme une limite en probabilité, et elle n'est a priori pas de carré intégrable. On a la proposition suivante :

Proposition 6.5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans $\mathbf{H}$ telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_{\mathbf{H}}^2] < +\infty$. Soit $(Q_t)_{0 \leq t \leq T}$ son crochet $\mathcal{L}^1$. Soit $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbf{H}$ tel que

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \langle Q_t \phi_t, \phi_t \rangle d\langle M \rangle_t < +\infty \right] = 1.$$

Alors le processus $\left(\int_0^t \langle \phi_s, dM_s \rangle \right)_{t \in [0, T]}$ est bien défini en tant que martingale locale réelle continue dont le crochet vérifie

$$\left\langle \int_0^\cdot \langle \phi_s, dM_s \rangle \right\rangle_t = \int_0^t \langle Q_s \phi_s, \phi_s \rangle d\langle M \rangle_s.$$

De plus si son crochet est intégrable, c'est-à-dire si

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \langle Q_s \phi_s, \phi_s \rangle d\langle M \rangle_s \right] < +\infty,$$

alors le processus $\left(\int_0^t \langle \phi_s, dM_s \rangle \right)_{t \in [0, T]}$ est une vraie martingale qui est de carré intégrable.

Remarque 6.6. Lorsque la martingale M n'est pas à valeur dans $\mathbf{H}$ mais est un processus de Wiener cylindrique sur $\mathbf{H}$, alors on peut définir formellement toutes ces quantités avec l'identification formelle $Q = \text{Id}$, où l'opérateur identité Id n'est évidemment pas un opérateur à trace finie dans $\mathbf{H}$. Les exercices de fin de chapitre mettent en lumière cette relation.

Maintenant qu'on sait définir une intégrale stochastique, l'étape suivante concerne l'élaboration d'une formule d'itô. On a le résultat suivant :

Théorème 6.7 (Formule d'Itô dans H). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit H un espace de Hilbert et $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans H telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_H^2] < +\infty$. Soit $(Q_t)_{0 \leq t \leq T}$ son crochet $\mathcal{L}^1$. Soit $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus d'Itô à valeur dans H donné par

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \cdot) ds + M_t.$$

Soit $g \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$ telle que pour tout opérateur $Q \in \mathcal{L}^1$ l'application

$$T_{Q,g} := \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \text{Tr}(D^2g[h]Q) \end{array}$$

soit continue, où $D^2g[h]$ est la Hessienne de g dans la direction $h \in H$, alors le processus stochastique $Y_t = g(X_t)$ est un processus d'Itô et l'on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Dg[X_s](u(s, \cdot)) ds + \int_0^t \langle j^{-1}(Dg[X_s]), dM_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}(D^2g[X_s]Q_s) d\langle M \rangle_s,$$

où j est l'isométrie depuis une réalisation du dual de H (réalisation identifiée avec H), c'est-à-dire l'application qui identifie un élément de H comme une forme linéaire sur H .

Il existe un exemple fondamental en prenant pour g la norme $\|\cdot\|_H^2$ sur H . Dans ce cas, on obtient

$$\|X_t\|_H^2 = \|X_0\|_H^2 + 2 \int_0^t \langle X_s, u(s, \cdot) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle X_s, dM_s \rangle + \langle M \rangle_t$$

car on a bien $D^2g[h] = 2 \text{Id}$ pour tout $h \in H$, $\text{Tr}(\text{Id} Q_s) = 1$ pour tout $s \in [0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$, $Dg[X_s] = (h \mapsto 2\langle X_s, h \rangle)$ et la condition

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Q_t j^{-1}(Dg[X_t]), j^{-1}(Dg[X_t]) \rangle d\langle M \rangle_t &= \int_0^T \langle Q_t 2X_t, 2X_t \rangle d\langle M \rangle_t \\ &= 4 \int_0^T \left\langle Q_t \frac{X_t}{\|X_t\|_H}, \frac{X_t}{\|X_t\|_H} \right\rangle \|X_t\|_H^2 d\langle M \rangle_t \\ &\leq 4 \int_0^T \text{Tr}(Q_t) \|X_t\|_H^2 d\langle M \rangle_t \\ &= 4 \int_0^T \|X_t\|_H^2 d\langle M \rangle_t < +\infty \end{aligned}$$

est bien vérifiée en probabilité dès que le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est de carré intégrable contre le crochet de $(M_t)_{t \in [0, T]}$ (attention, toutes les quantités sont bien positives ici).

Exercice 6.1. Soit Q un opérateur linéaire auto-adjoint semi-défini positif de trace finie. Montrer que le processus défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$W_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} B_t^k Q^{1/2} e_k$$

est une martingale de carré intégrable dont le crochet est $\langle W \rangle_T = \text{Tr}(Q) \times t$, et $Q_t = \frac{Q}{\text{Tr}(Q)}$.

Exercice 6.2. Montrer que le processus de Wiener cylindrique

$$W_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} B_t^i e_i$$

possède formellement un crochet $\mathcal{L}^1$ qui est $\langle \langle W \rangle \rangle_T = \text{Id} \times t$, mais l'opérateur Id n'est pas de trace finie sur H .

Exercice 6.3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et $(W_t)_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener cylindrique dans $\mathbf{H}$. Soit $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{H}$ tel que

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \langle \phi_t, \phi_t \rangle dt < +\infty \right] = 1.$$

Montrer qu'on peut définir une intégrale stochastique de ϕ contre W pour tout $0 \leq t \leq T$ par la formule suivante,

$$\begin{aligned} (\phi \cdot W)_t &:= \left(\int_0^t \langle \phi_s, dW_s \rangle \right) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\langle \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \phi_s ds, B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t} \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^d \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \phi_s, e_i \rangle ds (B_{t_{j+1} \wedge t}^i - B_{t_j \wedge t}^i) \\ &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^d \int_0^t \langle \phi_s, e_i \rangle dB_s^i \end{aligned}$$

où la limite est une limite en probabilité.

6.2. Approche variationnelle des équations aux dérivées partielles linéaires. Soit A un opérateur non borné. Normalement on considère l'espace $D(A)$ sur lequel l'opérateur est bien défini dont on suppose souvent qu'il est dense dans $\mathbf{H}$. Mais ici on va utiliser une extension développée entre autres par Jacques Louis Lions. On considère un triplet de Gelfand (V, H, V') où V est un sous-espace de $\mathbf{H}$ qui est de Banach avec une inclusion continue, et V' son espace topologique dual. Dans ce contexte, H est alors identifié avec son dual, et on a la relation

$$V \subset H \sim H' \subset V'$$

On considère alors l'opérateur A sur V défini par extension depuis $D(A)$. On pose les normes associés à ces espaces sous les notations $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_V$ et

$$\|v\|_{V'} := \sup_{u \in V, \|u\|_V \leq 1} \langle v, u \rangle_{V, V'}, \quad \forall v \in V'$$

On peut considérer sans perte de généralité que

$$\|u\|_{V'} \leq \|u\|_H \leq \|u\|_V \quad \forall u \in V$$

On suppose que A vérifie l'hypothèse de coercivité suivante :

Hypothèse 6.8 (Coercivité). $\exists \lambda, \alpha > 0$ tels que pour tout $u \in V$

$$2\langle Au, u \rangle + \alpha \|u\|_V^2 \leq \lambda \|u\|_H^2.$$

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 6.9. Soit A un opérateur dans $\mathcal{L}_c(V, V')$ vérifiant l'hypothèse, $u_0 \in \mathbf{H}$ une donnée initiale et $f \in L^2([0, T]; V')$. Alors l'équation

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

admet une unique solution $u \in L^2([0, T]; V)$ qui est également dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbf{H})$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème on va avoir besoin d'un lemme d'interpolation qui est le suivant :

Lemme 6.10. *Si $u \in L^2([0, T]; V)$ est absolument continue à valeurs dans V' telle que $\frac{du}{dt}$ (sa "dérivée") est également dans $L^2([0, T], V')$, alors $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ et pour presque tout $t \in [0, T]$ on a*

$$\frac{d\|u(t)\|_H^2}{dt} = 2 \left\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t) \right\rangle$$

Démontrons en premier l'unicité dans le théorème. Considérons deux solutions u^1 et u^2 , et posons $w = u^1 - u^2$ qui vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} &= Aw(t) \\ w(0) &= 0 \end{aligned}$$

□

alors par le lemme d'interpolation, on a

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_H &= \int_0^t \frac{d\|w(s)\|_H^2}{ds} ds = 2 \int_0^t \left\langle \frac{dw(s)}{ds}, w(s) \right\rangle ds \\ &= 2 \int_0^t \langle Au(s) - Av(s), u(s) - v(s) \rangle ds \\ &\leq \lambda \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H ds = \lambda \int_0^t \|w(s)\|_H ds \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure que $w(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Pour l'existence, on va se ramener en dimension finie par la méthode de Galerkin. On pose $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée dans H qui est composée d'éléments de V . On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-espace V_n de dimension finie engendré par la famille $(e_k)_{k=1 \dots n}$. Il est clair qu'en tant que système d'équations différentielles ordinaires il existe une fonction $u_n \in \mathcal{C}([0, T], V_n)$ telle que pour tout $k \in [1, n]$

$$\frac{d}{dt} \langle u_n(t), e_k \rangle = \langle Au_n(t), e_k \rangle + \langle f(t), e_k \rangle$$

avec $\langle u_n(0), e_k \rangle = \langle u_0, e_k \rangle$. Il est clair qu'on a la relation

$$\|u_n(t)\|_H^2 = \sum_{k=1}^n \langle u_0, e_k \rangle^2 + 2 \int_0^t \langle Au_n(s) + f(s), u_n(s) \rangle ds$$

Donc on déduit par coercivité et inégalité de Young

$$\|u_n(t)\|_H^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_n\|_V ds \leq \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 + \lambda \int_0^t \|u_n(s)\|_H^2 ds$$

Le lemme de Gronwall nous donne l'estimation suivante pour une certaine constante $R \in \mathbb{R}_+$ qui dépend de T, α, λ, f .

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \right] \leq R < +\infty$$

La suite des fonctions est donc bornée uniformément et on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2([0, T], V)$ vers une fonction u . Puisque A est continu de V dans V' , alors il est également continue pour la topologie faible et Au_n converge faiblement vers Au . Donc u est bien solution de l'équation au sens faible. Le lemme d'interpolation assure la continuité dans H .

Remarque 6.11. *Il existe un moyen de considérer des opérateurs non linéaires, mais il faut ajouter des hypothèses en plus de la coercivité. La première approche considère un opérateur dit monotone vérifiant la relation suivante pour une certaine constante Λ*

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \leq \Lambda \|u - v\|_H^2.$$

L'autre approche suppose que l'injection de V dans H est compacte, permettant d'extraire une sous-suite fortement convergente dans H .

6.3. Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. On va suivre l'approche développée dans la section précédente dans le cas des équations aux dérivées partielles stochastiques perturbées par des martingales de carré intégrables. Comme dans le cas déterministe on va demander des hypothèses sur l'opérateur A , mais également sur les opérateurs devant le bruit qui pourraient être non-linéaires.

Hypothèses 6.12 (Contrôle). *Soit A un opérateur de V dans V' possiblement non linéaire. Soit $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de V dans H possiblement non linéaires. On dit que (A, B) vérifie les hypothèses de contrôle si les opérateurs A et B vérifient les hypothèses suivantes.*

Hypothèse 6.13 (Coercivité). $\exists \lambda, \nu, \alpha > 0$ tels que pour tout $u \in V$

$$2\langle A(u), u \rangle + \|B(u)\|_H + \alpha \|u\|_V^2 \leq \lambda \|u\|_H^2 + \nu$$

où

$$\|B(u)\|_H := \sum_{k \in \mathbb{N}} \|B_k(u)\|_H^2.$$

Hypothèse 6.14 (Monotonie). $\exists \mu > 0$ tel que pour tout $u, v \in V$.

$$2\langle A(u) - A(v), u - v \rangle + \|B(u) - B(v)\|_H \leq \mu \|u - v\|_H^2$$

Hypothèse 6.15 (Sous-linéarité). $\exists c > 0$ tel que pour tout $u \in V$

$$\|A(u)\|_{V'} \leq c(1 + \|u\|_V)$$

Hypothèse 6.16 (Continuité faible). *Pour tout $u, v, w \in V$, la fonction Θ réelle à valeurs réelles telle que $\Theta(\theta) : \theta \mapsto \langle A(u + \theta v), w \rangle$ est continue.*

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles stochastiques suivante

$$du = A(u)dt + B(u)dW_t$$

avec la donnée initiale $u(0) = u_0 \in H$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit Q un opérateur linéaire auto-adjoint semi-défini positif de trace finie. On se donne $(W^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de mouvements browniens indépendants et on construit la martingale continue de carré intégrable à valeurs dans H telle que

$$M_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} W_t^k Q^{1/2} e_k$$

ou par exemple un processus de Wiener cylindrique sur H . Comme on recherche des solutions dont les trajectoires sont dans $L^2([0, T], V)$, alors $A(u)$ est dans $L^2([0, T], V')$ ce qui permet d'utiliser une forme faible et $B_k(u)$ est dans H ce qui permet de définir une forme linéaire Hilbert-Schmidt. On peut donc comprendre l'équation sous la forme suivante valable pour tout $v \in V$

$$\langle u(t), v \rangle_{V', V} = \langle u_0, v \rangle_{V', V} + \int_0^t \langle A(u(s)), v \rangle ds + \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle B_k(u(s)), v \rangle dW_s^k.$$

Remarque 6.17. On peut remarquer que puisque A est à croissance sous-linéaire, la coercivité implique que B est aussi à croissance sous-linéaire. De plus, on pourrait se ramener au cas $\Lambda := \max(\lambda, \mu) = 0$ par la transformation $\exp(-\Lambda t/2)A(\exp(-\Lambda t/2 \cdot) - \frac{\Lambda}{2}Id)$ et $\exp(-\Lambda t/2)B(\exp(-\Lambda t/2 \cdot))$ dont $v := \exp(-\Lambda t/2)u$ est solution.

Théorème 6.18. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit (A, B) satisfaisant les hypothèses de contrôle. Soit $u_0 \in H$. Alors il existe une unique solution faible $\{u(t)\}_{t \in [0, T]}$ qui soit un processus stochastique adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ et dont les trajectoires sont presque sûrement dans $L^2([0, T]; V) \cap C([0, T]; H)$.

Démonstration. Comme dans le cas déterministe, on fait appel au lemme d'interpolation suivant :

Lemme 6.19. Soient $u_0 \in H$, et $\{u(t)\}_{t \in [0, T]}$ et $\{v(t)\}_{t \in [0, T]}$ deux processus adaptés à la filtration $\mathcal{F}_t$ dont les trajectoires sont respectivement dans $L^2([0, T]; V)$ et $L^2([0, T]; V')$. Soit M_t une martingale locale à valeurs dans H telle que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s) ds + M_t$$

pour presque tout $t \in [0, T]$ alors $u \in C([0, T]; H)$ presque sûrement et on a la relation suivante presque sûrement

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u_0\|_H^2 + 2 \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle u(s), dM_s \rangle + \langle M \rangle_t$$

La démonstration du lemme est quelque peu technique et sa démonstration n'est pas rappelée ici, mais il est le socle de la formule d'Itô. Démontrons maintenant l'unicité. Soient u^1 et u^2 deux solutions adaptées. On définit le temps d'arrêt pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n := \inf\{t \in [0, T] : \|u^1(t)\|_H^2 \vee \|u^2(t)\|_H^2 \vee \int_0^t (\|u^1(s)\|_V^2 + \|u^2(s)\|_V^2) ds \geq n\}$$

qui diverge vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On remarque que $w(t) := u^1(t) - u^2(t)$ satisfait dans V'

$$w(t) = \int_0^t A(u^1(s)) - A(u^2(s)) ds + \int_0^t (B(u^1(s)) - B(u^2(s))) dW_s.$$

Le dernier terme est une martingale locale notée M_t et son crochet est $\langle M \rangle_t = \int_0^t \|B(u^1(s)) - B(u^2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds$. Si on arrête la martingale au temps τ_n alors c'est une vraie martingale d'espérance nulle. On peut appliquer le lemme d'interpolation sur w , et prendre l'espérance pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|w(t \wedge \tau_n)\|_H^2 &= 2\mathbb{E} \int_0^{\tau_n} \langle A(u^1(s)) - A(u^2(s)), u^1(s) - u^2(s) \rangle ds \\ &\quad + 0 + \mathbb{E} \int_0^{\tau_n} \|B(u^1(s)) - B(u^2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

On applique l'hypothèse de coercivité pour obtenir

$$\mathbb{E}\|w(t \wedge \tau_n)\|_H^2 \leq \lambda \int_0^{t \wedge \tau_n} \|u^1(s) - u^2(s)\|_H^2 ds \leq \lambda \int_0^t \|u^1(s \wedge \tau_n) - u^2(s \wedge \tau_n)\|_H^2 ds.$$

Le lemme de Gronwall assure alors l'unicité presque sûrement. On s'interroge maintenant sur l'existence en considérant la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ base orthonormée dans H composée d'éléments de V . On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'unique processus adapté $u_n(t) \in C([0, T]; V_n)$

presque sûrement tel que

$$\langle u_n(t), e_k \rangle = \langle u_0, e_k \rangle + \int_0^t \langle A(u_n(s)), e_k \rangle ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u(s)), e_k \rangle dW_s^i.$$

et par la formule d'Itô, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [1, n]$

$$\begin{aligned} \langle u_n(t), e_k \rangle^2 &= \langle u_0, e_k \rangle^2 + 2 \int_0^t \langle A(u_n(s)), e_k \rangle \langle u_n(s), e_k \rangle ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u(s)), e_k \rangle^2 dW_s^i \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle u_n(s), e_k \rangle \langle B_i(u_n(s)), e_k \rangle dW_s^i. \end{aligned}$$

En sommant les équations sur l'indice k on obtient une estimation de la norme de u_n par la formule

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \|u_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle A(u_n(s)), u_n(s) \rangle ds + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u(s)), e_k \rangle^2 dW_s^i \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u_n(s)), u_n(s) \rangle dW_s^i \\ &\leq \|u_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle A(u_n(s)), u_n(s) \rangle ds + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u_n(s)), u_n(s) \rangle dW_s^i \\ &\quad + \int_0^t \|B(u_n(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \end{aligned}$$

En prenant l'espérance, le terme d'intégrale stochastique disparaît et on obtient

$$\mathbb{E}\|u_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \mathbb{E}\|u_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2\mathbb{E} \int_0^t \langle A(u_n(s)), u_n(s) \rangle ds + \mathbb{E} \int_0^t \|B(u_n(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds$$

ce qui fournit par l'isométrie d'Itô et par l'hypothèse de coercivité l'inégalité suivante

$$\mathbb{E} \left[\|u_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 ds \right] \leq \mathbb{E}\|u_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \lambda \mathbb{E} \int_0^t \|u_n(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \nu t.$$

Le lemme de Gronwall permet d'obtenir qu'il existe une constante $R \in \mathbb{R}_+$ dépendant de u_0, λ, T, ν telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\|u_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq R < +\infty$$

Et par cette première estimation, on obtient qu'il existe une constante $R \in \mathbb{R}_+$ dépendant de u_0, λ, T, ν telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \int_0^T \|u_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 dt \leq R < +\infty$$

Dans cette majoration l'espérance est mal positionnée dans la première inégalité pour obtenir des convergences ponctuelles de u_n qui seront nécessaire par la suite. Toutefois, partant de l'inégalité

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \|u_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle A(u_n(s)), u_n(s) \rangle ds + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u_n(s)), u_n(s) \rangle dW_s^i \\ &\quad + \int_0^t \|B(u_n(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds, \end{aligned}$$

on peut prendre la valeur absolue et la borne supérieure en temps pour obtenir

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \int_0^T |\langle A(u_n(s)), u_n(s) \rangle| ds \\ &\quad + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u_n(s)), u_n(s) \rangle dW_s^i \right| + \int_0^T \|B(u_n(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Davis-Burkholder-Gundy sur les martingales pour obtenir qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle B_i(u_n(s)), u_n(s) \rangle dW_s^i \right| \right] &\leq c \mathbb{E} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n \int_0^T \langle B_i(u_n(s)), u_n(s) \rangle^2 ds} \right] \\ &\leq c \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\int_0^T \|B(u_n(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \right] + \frac{c^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T \|B(u_n(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \right] \end{aligned}$$

On obtient donc par l'hypothèse de coercivité et de croissance sous linéaire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha \int_0^T \|u_n(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \right] &\leq \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + c \mathbb{E} \left[\int_0^T \|u_n(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \right] + c \\ &\leq \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + cR + c < +\infty \end{aligned}$$

La suite u_n est alors bornée dans $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T]; H)) \cap L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$ donc les suites $A(u_n)$ et $B(u_n)$ sont également bornées respectivement dans $L^2(\Omega; L^2([0, T]; V'))$ et $L^2(\Omega; L^2([0, T]; \mathcal{H}))$. On peut donc extraire par un procédé diagonal une suite u_n telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } L^2(\Omega; L^2([0, T]; V)) \\ A(u_n) &\rightharpoonup \xi \text{ dans } L^2(\Omega; L^2([0, T]; V')) \\ B(u_n) &\rightharpoonup \eta \text{ dans } L^2(\Omega; L^2([0, T]; \mathcal{H})) \end{aligned}$$

on a également que $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^2(\Omega; L^\infty([0, T]; H))$. Chaque terme de l'équation sous forme faible converge vers une limite, il reste donc à identifier $A(u)$ avec ξ et $B(u)$ avec η . On fait ici l'hypothèse que $\Lambda = \max(\lambda, \mu) = 0$ pour simplifier la démonstration. Alors on obtient pour tout $v \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$2\mathbb{E} \int_0^T \langle A(u_n(t)) - A(v(t)), u_n(t) - v(t) \rangle dt + \mathbb{E} \int_0^T \|B(u_n(t)) - B(v(t))\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq 0$$

La convergence faible assure que tous les termes ont une limite identifiable, sauf deux termes qui vérifient en réalité l'inégalité suivante

$$2\mathbb{E} \int_0^T \langle \xi(t), u(t) \rangle dt + \mathbb{E} \int_0^T \|\eta\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq \liminf 2\mathbb{E} \int_0^T \langle A(u_n(t)), u_n(t) \rangle dt + \mathbb{E} \int_0^T \|B(u_n(t))\|_{\mathcal{H}}^2 dt.$$

Remarque 6.20. La démonstration de cette inégalité résulte de la convexité de la norme et d'une convergence ponctuelle de $u_n(T)$ vers $u(T)$.

De ces deux inégalités, on obtient la majoration valable pour tout $v \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$

$$2\mathbb{E} \int_0^T \langle \xi - A(v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt + \mathbb{E} \int_0^T \|\eta - B(v(t))\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq 0$$

En choisissant $v = u$, on obtient directement que $\eta = B(u)$. Puis en posant $v(t) = u(t) - \theta w(t)$ avec $\theta > 0$ et $w \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$, on obtient

$$\mathbb{E} \int_0^T \langle \xi - A(u(t) - \theta w(t)), w(t) \rangle dt \leq 0.$$

Et par l'hypothèse de continuité de Θ , on déduit que

$$\mathbb{E} \int_0^T \langle \xi - A(u(t)), w(t) \rangle dt \leq 0$$

pour tout $w \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$, ce qui impose $\xi = A(u)$.

□

FÉDÉRATION DE MATHÉMATIQUES DE CENTRALESUPÉLEC, SACLAY, FRANCE
E-mail address: `goudenege@math.cnrs.fr`